Arch. Soc. Oftal. Optom. (1984)-18-181

Forum Ophtalmologicum Centenarii
marzo / 84

DISEÑO MATEMATICO DE LA GEOMETRIA DEL OJO

ALEJANDRO ARCINIEGAS, M. D.
LUIS ENRIQUE AMAYA, Ph. D.[2]
MARCO PUCCINI[3]
Bogotá, Colombia

Se escribe un programa computador, para modelar geométricamente un ojo humano, teniendo como base algunas subrutinas del programa SAP IV de la Universidad de California, escrito en lenguaje Fortran.

Con el objeto de generar la geometría propuesta, fue necesario dividir al ojo en tres zonas, cada una de las cuales corresponde a una figura de la geometría plana, ya que el ojo no corresponde a ninguna figura geométrica, estrictamente hablando.

Cuando se unen estas tres zonas forman el ojo.

Desde el punto de vista geométrico estrictamente hablando, el ojo humano no posee una figura exactamente igual a cualquiera de las descritas en la geometría plana o del espacio; es más, haciendo un símil con el globo terráqueo, que tiene una forma de esferoide achatado en los polos, y al cual se le denomina GEOIDE (forma de tierra), bien podría llamarse al globo ocular OFTALMOIDE (forma del ojo) (Fig. 1).

---

1. Jefe del Depto. de retina de la Clínica Barraquer y profesor de la Escuela Superior de Oftalmología Instituto Barraquer de América, apartado 90404, Bogotá (8), Colombia.

2. Coordinador Programas Postgrado facultad de ingeniería de la Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.

3. Estudiante último semestre, facultad de Ingeniería, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.

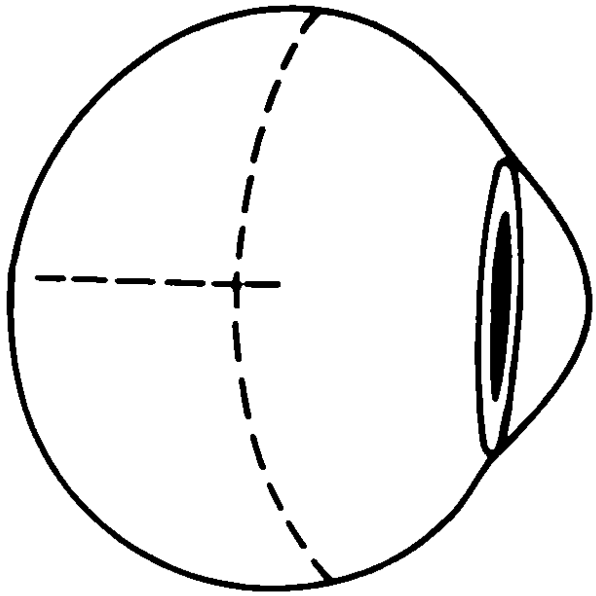

FIGURA 1
Oftalmoide

Por lo anterior, para la generación de las coordenadas de los distintos puntos de la superficie del ojo, se dividió a éste en tres zonas geométricas a saber: (Fig 1A).

A. Zona anterior o córnea.

B. Zona posterior: va desde el ecuador geométrico al polo posterior.

C. Zona de transición: comprendida entre las dos anteriores.

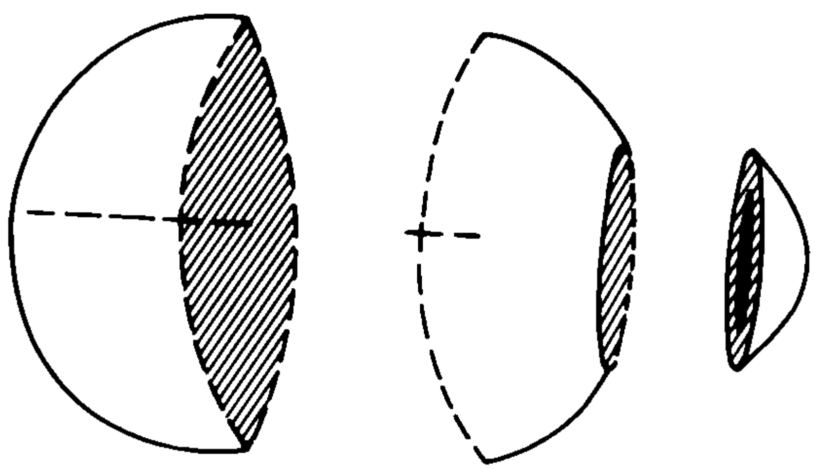

FIGURA 1A
Zonas geométricas

Las formas geométricas de las zonas A y B se consideran elipsoides pues se le da la posibilidad a la zona corneal de tener curvaturas horizontales y verticales diferentes; también porque a la zona posterior se le conocen tres diámetros distintos.

La forma geométrica de la zona de transición es más compleja pues se genera como producto de la combinación de dos polinomios de tercer grado y una elipse, que corresponde a la figura geométrica denominada paraboloide hiperbólico.

GEOMETRIA DEL MODELO OCULAR

Para generar la geometría del ojo según el modelo, se utilizan como base por lo menos siete parámetros a saber:

RAP: Radio Antero-posterior (Fig. 2)

RV: Radio Vertical (Fig. 2)

RTR: Radio Transversal (Fig. 2)

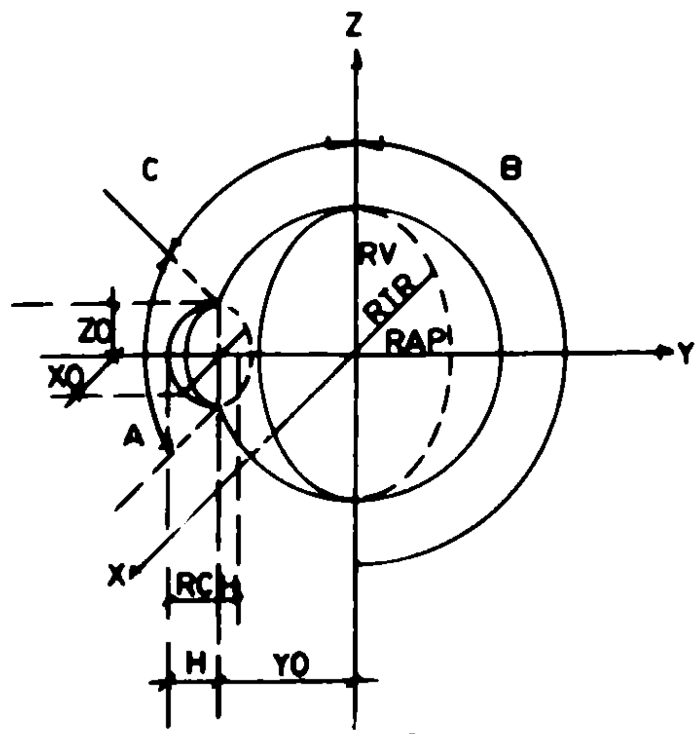

FIGURA 2
Parámetros

RCH: Radio Corneal en el plano vertical (plano Y - Z) (Fig. 2)

RCVT: Radio Corneal en el plano horizontal (plano X - Y, X - Z) (Fig. 2)

El radio en X y Z del Elipsoide de la córnea es el mismo; es decir, el elipsoide que contiene la superficie corneal tiene los radios en X y en Z iguales: (Fig. 2)

$$\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} + \frac{Z^2}{C^2} = 1 \Rightarrow A = C$$

$$\left.\begin{matrix} XO \\ ZO \end{matrix}\right\}$$ Radios de la córnea en los puntos de transición con la esclera

Algunos de los parámetros mencionados, tales como los radios de la córnea, se toman normalmente en forma indirecta; en la presente investigación se calculan a partir de las medidas conocidas que se encuentran en la literatura, tales como la altura corneal (H) y los radios en la base de la córnea (XO, YO, ZO).

La modelación geométrica de cada zona está gobernada por una ecuación que representa la figura geométrica de cada una de las zonas:

A. Zona anterior o córnea: (Elipsoide) (Fig. 3)

Ecuación:

$$\frac{Z^2}{RCVT^2} + \frac{X^2}{RCVT^2} + \frac{Y^2}{RCH^2} = 1$$

donde Y = YN = RAP — RCH*

Deducción:

$$R^2 = X^2 + Z^2$$

$$\frac{Z^2 + X^2}{RCVT^2} = \frac{R^2}{RCVT^2} = 1 - \frac{Y^2}{RCH^2} \qquad R = \sqrt{\left(1 - \frac{Y^2}{RCH^2}\right) x\ RCVT^2}{**}$$

* YN: es negativo en la córnea (Fig. 3A).

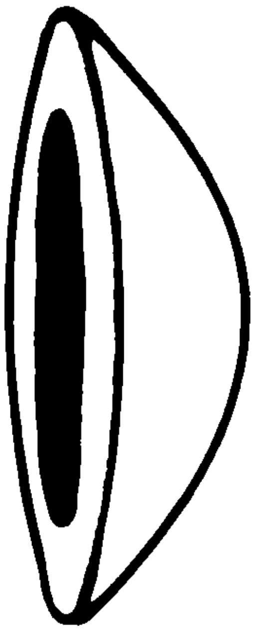

FIGURA 3
Zona anterior o córnea (elipsoide)

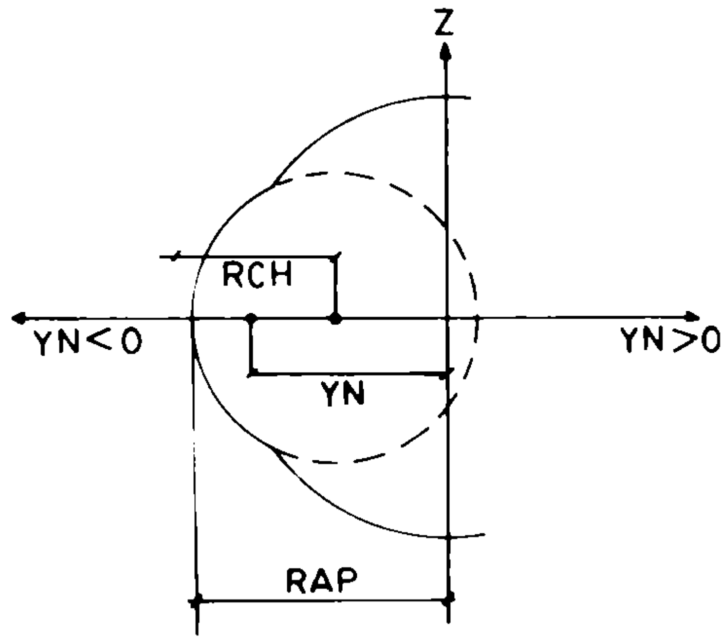

FIGURA 3A
Radio corneal negativo

** R: Es la distancia perpendicular entre el punto de la coordenada a generar con el RAP; este R se evalúa para cada Θ; cada Θ a su vez varía entre 0° y 360° para cada Y previamente establecido.***

*** Θ: es el ángulo formado por R y el RTR del ojo.

B. Zona posterior: Elipsoide (Fig. 4)

Ecuación:

$$\frac{X^2}{RTR^2} + \frac{Y^2}{RAP^2} + \frac{Z^2}{RV^2} = 1$$

Deducción:

$$X = R\cos\Theta \,;\ Z = \text{seno}\,\Theta$$

$$\frac{R^2\cos^2\Theta}{RTR^2} + \frac{R^2\,\text{seno}^2\,\Theta}{RV^2} + \frac{Y^2}{RAP^2} = 1 \qquad R^2\left(\frac{\text{Cos}^2\,\Theta}{RTR^2} + \frac{\text{Seno}^2\,\Theta}{RV^2}\right) + \frac{Y^2}{RAP^2} = 1$$

$$R = \sqrt{\left[1 - \frac{Y^2}{RAP^2}\right] \bigg/ \left[\frac{\text{Cos}^2\,\Theta}{RTR^2} + \frac{\text{Seno}^2\,\Theta}{RV^2}\right]}$$

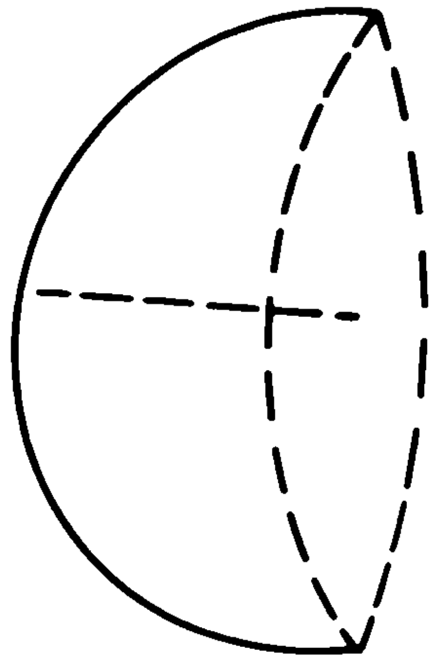

FIGURA 4
Zona posterior (elipsoide)

C. Zona de transición (Fig. 5)

Está formada por una elipse (Fig. 6) y dos polinomios de tercer grado cuyos diámetros se calculan a partir de un polinomio de tercer grado en el plano Y — Z (Fig. 7) y otro polinomio, también de tercer grado en el plano X — Y (Fig. 8).

Las constantes de estos polinomios se calculan con base en que la zona de transición en el punto donde comienza debe coincidir con los radios de la base de la córnea.

En la unión de la zona de transición con la zona posterior deben coincidir la ecuación de la zona de transición con la ecuación de la zona posterior; en ese punto los radios verticales y horizontales son los que se describen en la anatomía ocular (RTH y RV). Además estas ecuaciones deben cumplir con la premisa de unir suavemente la córnea con la zona de transición y ésta a su vez con la zona posterior.

ECUACION EN EL PLANO X — Z ELIPSE (Fig. 6)

$$\frac{Z^2}{RTV^2} + \frac{X^2}{RTH^2} = 1 \qquad \begin{aligned} X &= R \cos \Theta \\ Z &= R \operatorname{seno} \Theta \end{aligned}$$

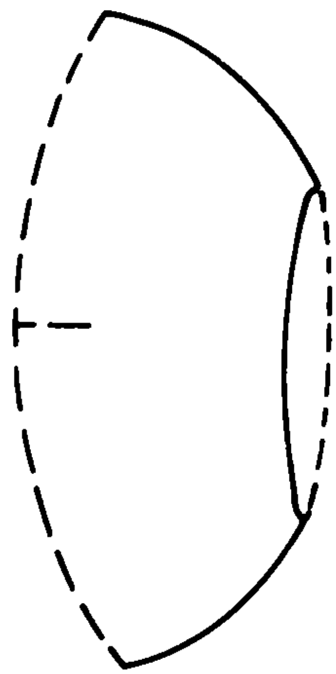

FIGURA 5
Zona de transición

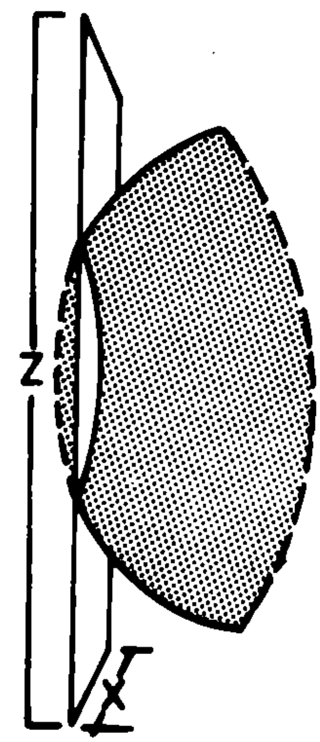

FIGURA 6
Zona de transición: plano X - Z (Elipse)

$$\frac{R^2 \text{ seno}^2 \Theta}{RTV^2} + \frac{R^2 \cos^2 \Theta}{RTH^2} = 1 = R^2 \left(\frac{\text{Seno}^2 \Theta}{RTV} + \frac{\text{Cos}^2 \Theta}{RTH} \right) = 1$$

$$R = \sqrt{1 \Big/ \left[\frac{\text{Seno}^2 \Theta}{RTV^2} + \frac{\text{Cos}^2 \Theta}{RTH^2} \right]}$$

ECUACION EN EL PLANO Y — Z (POLINOMIO DE 3er GRADO) (PLANO VERTICAL)

(Fig. 7)

$Z = AV^{*} Y^3 + BV^{*} Y^2 + CV^{*} Y + DV$ donde AV, BV, CV y DV son las constantes que se calculan a partir de las condiciones de frontera de la zona de transición.

Esta ecuación debe cumplir las siguientes condiciones:

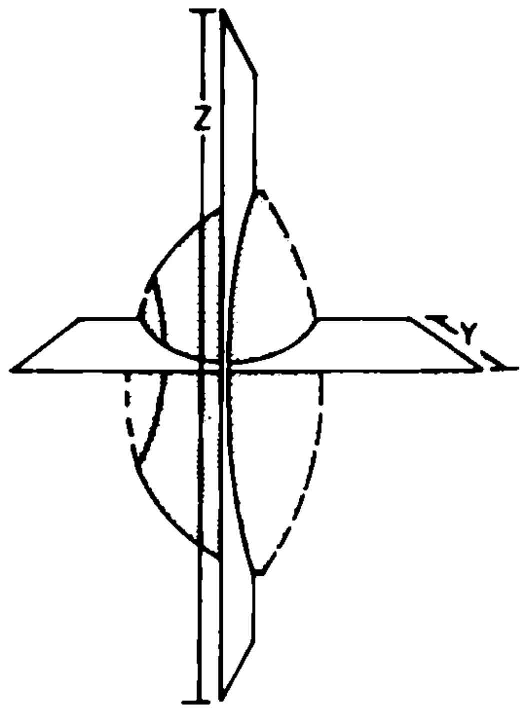

FIGURA 7
Zona de transición: plano Y - Z

1. **Para Y = Y0* (en el punto de unión con el elipsoide de la córnea)**

   Z = Z0

   Z (Y0) = AV* Y0³ + BV* Y0² + CV* Y0 + DV = Z0

   ***Y0: es la coordenada Y del plano Z - X que contiene la base de la córnea.**

2. **dZ/dY (Y = Y0) ≠ DV0**

   *** donde DV0 es el valor que toma la derivada de la ecuación que gobierna el elipsoide corneal en Y = Y0**

   Z = Z0, X = 0

   dZ/dY (Y = Y0) = 3AV* Y0 + 2BV* Y0 + CV = DV0

* la razón de igualar la pendiente de la curva corneal (DV0) con la pendiente de la zona de transición dZ / dY (Y = Y0), es que en este punto la unión de las dos superficies debe ser suave

3. Para Y = 0 (en la esclera) Z = RV

   Z (O) DV = RV

4. dZ / dY (Y = 0) = 0

   dZ / dY (Y = 0) CV = 0

La razón de igualar la pendiente de la ecuación de la zona de transición con la pendiente de la ecuación de la zona posterior es que el punto de unión de las dos superficies debe ser suave. De estas 4 ecuaciones se obtiene:

$$AV = \frac{-2\,Z0 + 2\,RV + DV0^{*}\,Y0}{Y0_{3}}$$

$$BV = \frac{3\,Z0 \times 3\,RV - DV0\#\,Y0}{Y0^{2}}$$

CV = 0

DV $\doteq$ RV

ECUACION EN EL PLANO Y - X (Fig. 8)

X = AH* Y^3 + BH* Y^2 + CH* Y + DH donde AH, BH, CH y DH son las constantes que se calculan a partir de las condiciones de frontera de la zona de transición. Haciendo en este caso, un desarrollo similar que para el del polinomio de 3er grado en el plano vertical, se obtienen los siguientes valores para las constantes.

$$AH = \frac{-2X0 + 2\,RTR + DH0^{*}\,Y0}{Y0^{3}}$$

$$AV = \frac{3X0 - 3RTR - DH0^{*}\,Y0}{Y0^{2}}$$

CH = RTR

DH = 0

Al unir las tres zonas se obtiene Fig. 9.

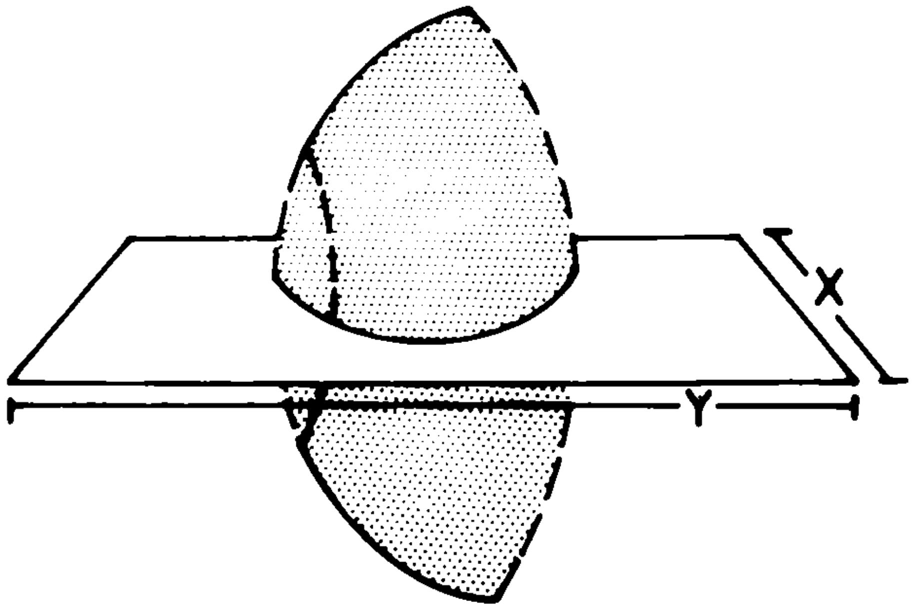

FIGURA 8
Zona de transición: plano Y - X

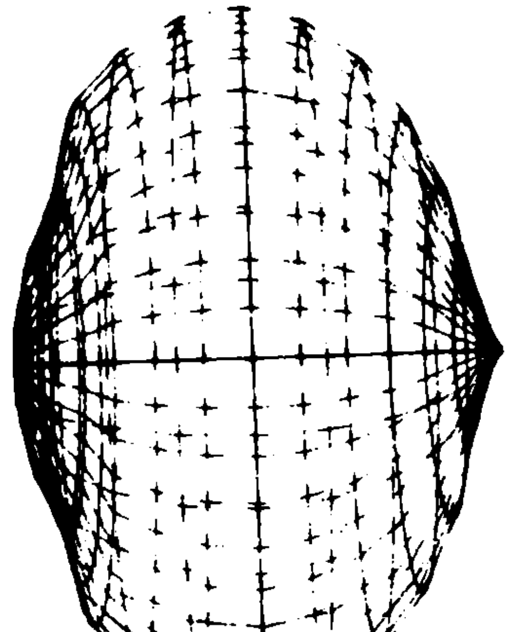

FIGURA 9
Dibujo ojo por computador

REFERENCIAS

1. ARCINIEGAS, A.; AMAYA, L. E.: *Biomecánica de la Miopía*. Universidad de los Andes. Instituto Barraquer de América. Bogotá, marzo 1978.

2. ARCINIEGAS, A.; AMAYA, L. E.: *Modelo Bioestructural del comportamiento del ojo. Biomecánica de la Miopía, Fase II*. Universidad de los Andes. Instituto Barraquer de América. Bogotá, agosto 1979.

3. BREBBIA, C. A.; CONNOR, J. J.: *Fundamentals of finite element. Techniques for structural Engineers*. John Wiley and sons. 1974.

4. GALLAHER, RICHAR: *Finite Elements for thin shells and Curved Members*.

5. HOGAN, M.: ALVARADO, JORGE. A.; WEDELL, JOAM E.: *Histology of the human eye*. Philadelphia, Sanders. 1971.

6. THOMAS, GEORGE Jr.: *Calculus and Analytic Geometry*. Addison - Wesley Publishing Company. Reading, Massachusetts. 1972.

7. WILSON, E.; PETTERSON, F.; BATHE, KLAUS-JORGEN: *A Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of linear Systems*. Cap IV University of California 1973.